На правах рукописи

МИТРОФАНОВ ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПО ВЫХОДУ

Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Н. Новгород, 2005

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА В АРЗАМАССКОМ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ (ФИЛИАЛЕ) НИЖЕГОРОДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор **Пакшин П.В.**

Официальные оппоненты

доктор физико-математических наук, профессор **Баландин Д.В.**

кандидат физико-математических наук, доцент **Антоновская О.Г.**

Ведущая организация

Волжская Государственная Академия Водного Транспорта

Защита состоится "1" декабря 2005 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.212.165.05 Нижегородского государственного технического университета по адресу:

603600 г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24, НГТУ, корпус 1, аудитория 258.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Нижегородского государственного технического университета.

Автореферат разослан "25" октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук, доцент А.П. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача синтеза стабилизирующего регулятора с обратной связью по выходу (ОСВ) была поставлена на самых ранних этапах развития теории управления, но ее исчерпывающего решения не получено до настоящего времени даже для линейных систем. В современных публикациях эту задачу относят к классу так называемых «трудных» задач теории управления. В то же время, указанный тип обратной связи является наиболее привлекательным с практической точки зрения, поскольку регулятор с обратной связью по выходу является наиболее простым.

Прогресс в развитии техники и технологий постоянно приводит к появлению новых классов систем, одним из которых являются системы случайной структуры (ССС). Отличительной особенностью ССС является наличие стохастического процесса смены (переключения) режимов, в каждом из которых поведение системы описывается дифференциальными или разностными уравнениями. В настоящее время, благодаря важным применениям в аэрокосмической сфере, энергетике, экономике, промышленном производстве, массовом обслуживании, коммуникационных сетях, и других областях, системы этого класса привлекают широкий интерес специалистов. Наличие как непрерывной, так и дискретной динамики приводит к появлению существенных особенностей в характеристиках управляемости, наблюдаемости и устойчивости таких систем. Кроме того, в таких системах обычно имеются существенные неопределенности, в частности, процесс смены режимов всегда имеет неопределенности. Поэтому для ССС задача синтеза управления с ОСВ еще более усложняется и должна рассматриваться в робастной постановке. В настоящее время существуют лишь единичные работы, в которых получены конструктивные результаты по синтезу управления с ОСВ для таких систем.

Таким образом, актуальность проблемы синтеза стабилизирующего управления с ОСВ для ССС обусловлена с одной стороны потребностями практики управления, с другой стороны – мировой тенденцией развития теории управления.

Цель работы. Целью данной работы является разработка методов и алгоритмов синтеза стабилизирующих регуляторов для непрерывных ССС с ОСВ, обладающих свойством робастности по отношению к различным типам неопределенностей.

Задачи диссертационной работы. Исходя из поставленной цели, в диссертации для линейных непрерывных ССС с ОСВ были поставлены следующие задачи:

1. Найти параметрическое описание (параметризацию) всех стабилизирующих регуляторов.
2. Разработать методы и алгоритмы синтеза робастных регуляторов.
3. Разработать программное обеспечение, реализующее указанные методы и алгоритмы.

4. Апробировать программное обеспечение в процессе решения ряда конкретных задач управления.

Методы исследования. Основными методами, использованными в процессе исследований, являются метод стохастических функций Ляпунова и методы выпуклого анализа. Применялись также результаты теории децентрализованного управления, методы линейных матричных уравнений и неравенств, и численные методы на базе пакета MATLAB.

Связь с планом. Исследования по теме диссертационной работы проводились в соответствии с планами научно-исследовательских работ Арзамасского политехнического института (филиала) НГТУ по проектам, поддержанным грантами Российского фонда фундаментальных исследований 02-01-00220 и 05-01-00132.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые получено параметрическое описание (параметризация) всех стабилизирующих регуляторов ССС с ОСВ и представлены новые необходимые и достаточные условия стабилизации ССС управлением с ОСВ, ориентированные на применение аппарата выпуклого анализа, в частности – линейных матричных неравенств (LMI).

Практическая ценность. Постановка задачи, решаемой в диссертации, вытекает из потребностей практики, поскольку в реальных системах всегда приходится синтезировать управление со статической или динамической ОСВ. Разработанное программное обеспечение может быть применено при синтезе стабилизирующего управления любыми ССС с ОСВ, включая сложные технические системы (летательные аппараты, энергетические установки), экономические и экологические системы.

Апробация полученных результатов. Основные результаты работы были представлены в виде статей и докладов на следующих научных мероприятиях:

1. 6-й международный симпозиум IFAC по нелинейным системам управления (NOLCOS 2004), Штутгарт, Германия, 2004 г.
2. VII международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем" памяти Е.С.Пятницкого, Москва, 2004 г.
3. 9-я международная конференция «Системный анализ и управление», Евпатория, Украина, 2004 г.
4. Вторая всероссийская научная конференция «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB», Москва, 2004 г.
5. 6-я международная конференция «Управление энергетическими системами» (CPS'04), Высокие Татры, Словакия, 2004 г.
6. Международная конференция, посвященная 70-летию профессора Б.Т. Поляка, Москва, 2005 г.

7. 16-й всемирный конгресс IFAC, Прага, Чехия, 2005г.
8. Совместная конференция IEEE по принятию решений и управлению и Европейская конференция по управлению (CDC-ECC'05), Севилья, Испания, 2005 г.

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 9 печатных работах. В совместных работах научному руководителю принадлежат постановки задач и идеи доказательств и алгоритмов. Доказательства теорем, разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения принадлежат автору.

Структура и объём диссертации. Основной текст диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, содержащего 73 названия, и занимает 109 машинописных страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе приведен обзор современного состояния проблемы управления ССС с ОСВ, рассмотрена история исследований различных подклассов таких систем, на базе имеющихся результатов очерчен круг задач, решаемых в дальнейших главах работы.

Во второй главе представлен один из основных теоретических результатов диссертационной работы: параметризация (т.е. параметрическое описание) всех стабилизирующих регуляторов ССС.

Математическая модель линейной ССС задается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(r(t))x(t) + B(r(t))u(t), \\ y(t) &= C(r(t))x(t), \ x(\tau) = \Phi_{ij}x(\tau - 0), \ t \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных состояния объекта управления, $u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управляющих сигналов, $y \in \mathbb{R}^k$ – вектор выходных сигналов, $r(t)$ – однородная марковская цепь, пространством состояний которой является множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \nu\}$, с матрицей интенсивностей переходов

$$P(\theta) = \left[P_{ij}(\theta)\right]_1^\nu = \left[\operatorname{Prob}\{r(t+\theta) = j \mid r(t) = i\}\right]_1^\nu = \exp(\Pi\theta), \ 0 \leqslant t \leqslant t + \theta,$$

$\Pi = [\pi]_{ij}$, $\pi_{ij} \geqslant 0 \ (i \neq j)$, $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{\nu} \pi_{ij}$, $\tau > t_0$ – момент перехода из режима $r(\tau - 0) = i$ в режим $r(\tau) = j$, A, B, C – матрицы совместимых размерностей, обозначаемые как A_i, B_i, C_i при $r(t) = i$, $\Phi_{ij} \ (i, j \in \mathbb{N})$ – постоянные матрицы размерности $n \times n$, причем $\Phi_{ii} = I$.

Будем рассматривать закон управления в форме статической ОСВ

$$u(t) = -G(i)y(t), \; r(t) = i \tag{2}$$

Определение 1. *Регулятор с ОСВ (2) называется стабилизирующим, если неравенства*

$$(A_i + B_i C_i G_i) H_i + H_i (A_i + B_i C_i G_i)^T + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T H_j \Phi_{ij} < 0, \; i \in \mathbb{N} \tag{3}$$

имеют положительно определенное решение $H_i = H_i^T \; (i \in \mathbb{N})$.■

Для любого $i \in \mathbb{N}$ пространство состояний системы (1) может быть представлено в форме следующего разбиения

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(C_i^T) \oplus \mathrm{Ker}(C_i), \tag{4}$$

где $\mathrm{Im}(C_i^T)$ и $\mathrm{Ker}(C_i)$ – взаимно-ортогональные подпространства, тогда для $x \in \mathbb{R}^n$ мы можем написать $x = x_I + x_K$, где $x_I \in \mathrm{Im}(C_i^T)$ и $x_K \in \mathrm{Ker}(C_i)$.

Определим вспомогательные матрицы

$$E_I(i) = C_i^{\dagger} C_i, \; E_K(i) = I - E_I(i) \tag{5}$$

В соответствии с разбиением (4) матрицы (5) являются матрицами проектирования на $\mathrm{Im}(C_i^T)$ и $\mathrm{Ker}(C_i)$, соответственно. Эти матрицы являются симметричными и единственными.

Для формулировки результатов введем в рассмотрение следующие множества матриц:

$$\mathcal{L}_o = \left\{ \begin{matrix} H_i \in \mathbb{R}^{n \times n} : H_i = H_i^T > 0, \; \exists G_i, \\ (A_i - B_i G_i C_i)^T H_i + H_i (A_i - B_i G_i C_i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T H_j \Phi_{ij} < 0 \end{matrix} \right\},$$

$$\mathcal{L}_s = \left\{ \begin{matrix} H_i \in \mathbb{R}^{n \times n} : \; H_i = H_i^T > 0, \exists K_i, \\ (A_i - B_i K_i)^T H_i + H_i (A_i - B_i K_i) + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T H_j \Phi_{ij} < 0 \end{matrix} \right\},$$

$$\mathcal{X} \triangleq \left\{ \begin{matrix} X_i \in \mathbb{R}^{n \times n} : X_i > 0, \\ B_i^{\perp} \left(A_i X_i + X_i A_i^T + \sum_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} X_i \Phi_{ij}^T X_j^{-1} \Phi_{ij} X_i \right) B_i^{\perp T} < 0 \end{matrix} \right\},$$

$$\mathcal{Y} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} Y_i \in \mathbb{R}^{n\times n} : Y_i > 0, \\ C_i^{T\perp}\left(A_i^T Y_i + Y_i A_i + \sum_{j=1}^{v} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T Y_j \Phi_{ij} \right) C_i^{T\perp T} < 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}(X_1,\ldots,X_v) \triangleq \left\{ \begin{array}{l} X_i \in \mathbb{R}^{n\times n} : X_i > 0,\ R_i > 0,\ Q_i > 0, \\ A_i^T X_i + X_i A_i - X_i B_i R_i^{-1} B_i^T X_i + \sum_{j=1}^{v} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T X_j \Phi_{ij} + Q_i = 0 \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{W}(Y_1,\ldots Y_v) \triangleq \left\{ \begin{array}{l} Y_i \in \mathbb{R}^{n\times n} : Y_i > 0,\ V_i > 0,\ W_i > 0, \\ A_i Y_i + Y_i A_i^T - Y_i C_i^T V_i^{-1} C_i Y_i + \sum_{j=1}^{v} \pi_{ij} Y_i \Phi_{ij}^T Y_j^{-1} \Phi_{ij} Y_i + W_i = 0 \end{array} \right\},$$

где $A^{\perp}$ означает матрицу полного ранга, ортогональную A.

Теорема 1. *Пусть заданы матрицы* $H_i\ (i \in \mathbb{N})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

i) $H_i \in \mathcal{L}_o$

ii) $H_i > 0,\ \mathcal{U}(H_1,\ldots H_v) \neq \phi$ *и* $\mathcal{W}(H_1^{-1},\ldots,H_v) \neq \phi$

iii) $H_i^{-1}\ \ \mathcal{X}$ *и* $H_i \in \mathcal{Y}$

Множество всех матриц усиления стабилизирующего регулятора с ОСВ задается формулой

$$G_i = R_i^{-1} B_i H_i Q_i^{-1} C_i^T \left(C_i Q_i^{-1} C_i^T \right)^{-1} + S_i^{1/2} \Lambda_i \left(C_i Q_i^{-1} C_i^T \right)^{-1/2} \tag{6}$$

где Λ_i *– произвольные матрицы, такие, что* $\|\Lambda_i\| < 1$, R_i, Q_i *– весовые матрицы управления и состояния,* $\{Q_i, R_i\} \in \mathcal{U}(H_1,\ldots,H_v)$, $S_i > 0$ *– матрицы, определяемые формулой*

$$S_i = R_i^{-1} - R_i^{-1} B_i^T H_i Q_i^{-1} \left[Q_i - C_i^T C_i \left(C_i Q_i^{-1} C^T \right)^{-1} C_i \right] Q_i^{-1} H_i B_i R_i^{-1}. \ \blacksquare$$

Первая часть теоремы 1 дает необходимые и достаточные условия стабилизации ССС регулятором со статической ОСВ в виде существования решений нелинейно связанных неравенств Ляпунова и нелинейно связанных уравнений Риккати. Вторая часть даёт общую формулу (6), описывающую все стабилизирующие регуляторы с ОСВ.

В частном случае, когда $C_i = I$ получим параметризацию стабилизирующих регуляторов с обратной связью по состоянию (ОСС).

Следствие 1. *Пусть заданы матрицы* $P_i\ (i \in \mathbb{N})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

i) $P_i \in \mathcal{L}_s$

ii) P_i *являются единственными положительно определенными решениями системы связанных уравнений Риккати*

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + \sum\nolimits_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T P_j \Phi_{ij} + Q_i = 0 \tag{7}$$

для некоторых $Q_i > 0$ *и* $R_i > 0$

iii) матрицы $P_i > 0$ *и удовлетворяют неравенствам*

$$B_i^{\perp}\left(A_i P_i^{-1} + P_i^{-1} A_i^T + \sum\nolimits_{j=1}^{\nu} \pi_{ij} P_i^{-1} \Phi_{ij}^T P_j \Phi_{ij} P_i^{-1}\right) B_i^{\perp T} < 0 \tag{8}$$

если $B_i B_i^T \not> 0$

Множество всех матриц усиления стабилизирующих регуляторов с ОСС задаются формулой

$$K_i = R_i^{-1} B_i^T P_i + R_i^{-1/2} \Lambda_i Q_i^{1/2} \tag{9}$$

где P_i, Q_i, R_i *удовлетворяют уравнениям Риккати (ii), а* Λ_i *– произвольные матрицы, ограниченные по норме* $\|\Lambda_i\| < 1$. ■

В общем случае множество матриц Ляпунова для стабилизирующих регуляторов с ОСВ $\mathcal{L}_o \triangleq \left\{H_i > 0 : H_i^{-1} \in \mathcal{X},\ H_i \in \mathcal{Y}\right\}$ невыпуклое, и проблема поиска H_i остается открытой. В случае управления с полной информацией о состоянии (ОСС) множество всех матриц Ляпунова $\mathcal{L}_s \triangleq \left\{P_i > 0 : P_i^{-1} \in \mathcal{X}\right\}$ выпуклое и эквивалентно множеству всех положительно определенных решений связанных уравнений Риккати (7).

Полученные результаты обобщаются на следующие классы ССС:

I. Робастные по отношению к неопределенностям вероятностей смены режимов ССС с ОСВ. В реальных задачах управления вероятности переходов из режима в режим точно неизвестны. Предположим, что матрица $\Pi = \Pi(\delta)$ является аффинной функцией векторного параметра δ , т.е существуют действительные матрицы $\Pi_0, \ldots, \Pi_N$ одинаковой размерности, такие, что $\Pi(\delta(t)) = \Pi_0 + \delta_1 \Pi_1 + \ldots + \delta_N \Pi_N$ для всех $\delta \in \Delta$. Допустим также, что неопределенные параметры δ_j, $j \in 1, \ldots, \mathrm{N}$ принимают значения на интервалах $\left[\underline{\delta}_j, \overline{\delta}_j\right]$, т.е. $\delta_j \in \left[\underline{\delta}_j, \overline{\delta}_j\right]$.

Определение 2. Регулятор с ОСВ (2) *называется робастно стабилизирующим по отношению к аффинными неопределенностям вероятностей переходов, если неравенства* (3) *при* $\pi_{ij} = \pi_{ij}(\delta)$, $\delta \in \Delta$, $i, j \in \mathbb{N}$ *имеют положительно определенное решение* $H_i = H_i^T$ $(i \in \mathbb{N})$. ■

Для таких систем в §2.3 получена частичная параметризация робастных стабилизирующих регуляторов.

2. ССС с динамическими ОСВ фиксированного порядка. В §2.4 показано, что системы с динамической ОСВ приводятся к системам со статической ОСВ путем расширения пространства состояний системы. Таким образом, результаты §2.2 и §2.3 естественным образом распространяются и на системы с динамическими регуляторами фиксированного порядка.

3. ССС с динамическими ОСВ свободного порядка. Множество решений задачи динамического регулятора, описанного в §2.4, является невыпуклым, следовательно, присутствуют те же самые вычислительные трудности, как и в случае статической ОСВ. Однако если не задавать порядок регулятора априори, тогда множество матриц Ляпунова, которое мы обозначим, как $\mathcal{L}_{ao}$:

$$\mathcal{L}_{ao} \triangleq \left\{ \tilde{H}_i : \exists n_c,\ \tilde{H}_i \in \tilde{\mathcal{L}}_o(n_c) \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_o \triangleq \left\{ \tilde{H}_i > 0:\ \exists \tilde{G}_i, \left(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i\tilde{G}_i\tilde{C}_i\right)^T \tilde{H}_i + \tilde{H}_i\left(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i\tilde{G}_i\tilde{C}_i\right) + \sum_{j=1}^{v} \pi_{ij}\tilde{\Phi}_{ij}^T\tilde{H}_j\tilde{\Phi}_{ij} < 0 \right\}$$

становится ***выпуклым***. Это утверждение, сформулированное и доказанное в §2.5, открывает путь к применению эффективных методов выпуклой оптимизации к решению задач управления, однако может приводить к непрактичным решениям с неприемлемо высоким порядком регулятора.

4. Децентрализованные ССС с ОСВ. Децентрализованная ССС с ОСВ представляет собой совокупность связанных локальных замкнутых подсистем (ЛЗП), управляемых регуляторами с ОСВ. Математическая модель такого типа ССС представлена следующими уравнениями

$$\begin{gathered} \dot{x}^l(t) = A^l(r(t))x^l(t) + B^l(r(t))u^l(t) + \sum_{k=1}^{L} A^{lk}(r(t))x^k(t), \\ y^l(t) = C^l(r(t))x^l(t),\ x^l(\tau) = \Phi_{ij}^l x^l(\tau - 0),\ t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $x^l \in \mathbb{R}^{n^l}$ – вектор переменных состояния ЛЗП, $u^l \in \mathbb{R}^{m^l}$ – вектор управляющих сигналов ЛЗП, $y^l \in \mathbb{R}^{k^l}$ – вектор выходных сигналов ЛЗП.

Такая система управляется совокупностью локальных динамических регуляторов с ОСВ при $r(t) = i$:

$$\dot{x}_c^l(t) = A_{ci}^l x_c^l(t) + B_{ci}^l y_p^l(t),\ u^l(t) = C_{ci}^l x_c^l(t) + D_{ci} y_p^l(t), \tag{11}$$

где $x_c^l \in \mathbb{R}^{n_c^l}$, $A_{ci}^l, B_{ci}^l, C_{ci}^l, D_{ci}^l$ - матрицы регулятора.

Система (10) может быть записана следующим образом.

$$\dot{x}^l(t) = A_i^l x_i^l(t) + B_i^l u^l(t) + \sum_{k=1}^{L} A_i^{lk} x^k(t),$$
$$x^l(\tau) = \Phi_{ij}^l x^l(\tau - 0),\ y^l(t) = C_i^l,\ u^l(t) = -G_i^l y^l(t) \tag{12}$$

где x^l – вектор переменных состояния ЛЗП, $x^l = \left[x_p^{lT} \quad x_c^{lT}\right]^T \in \mathbb{R}^{n_p^l + n_c^l}$,

$A_i^l, B_i^l, C_i^l, A_i^{lk}, G_i^l$ – соответствующие блочные матрицы.

Систему (12) можно представить в следующей компактной форме.

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + A_{Ci} x(t),\ y(t) = C_i x(t),\ x(\tau) = \Phi_{ij} x(\tau - 0), \tag{13}$$

$$u(t) = -G_i y(t), \tag{14}$$

где $x = \left[x^{1T}, \ldots, x^{LT}\right]^T$, $u = \left[u^{1T}, \ldots, u^{LT}\right]^T$, а блочно-диагональные матрицы определены следующим образом:

$$A_{Ci} = \left[A^{ij}\right]_l^L,\ A_i = \operatorname{diag}\left[A_i^l, \ldots, A_i^L\right],\ B_i = \operatorname{diag}\left[B_i^l, \ldots, B_i^L\right],$$
$$C_i = \operatorname{diag}\left[C_i^l, \ldots, C_i^L\right],\ G_i = \operatorname{diag}\left[G_i^l, \ldots, G_i^L\right], \Phi_{ij} = \operatorname{diag}\left[\Phi_{ij}^l, \ldots, \Phi_{ij}^L\right]$$

Определение 3. *Управление с ОСВ (14) называется децентрализованным стабилизирующим для системы (10), если неравенства*

$$\left(A_i + A_{Ci} - B_i G_i C_i\right)^T H_{Ci} + H_{Ci}\left(A_i + A_{Ci} - B_i G_i C_i\right) + \sum_{j=1}^{v} \pi_{ij} \Phi_{ij}^T H_{Cj} \Phi_{ij} < 0.$$

имеют положительно определенное решение $H_{Ci} = H_{Ci}^T$, $(i \in \mathbb{N})$. ■

В §2.6 формулируется и доказывается теорема о параметризации всех стабилизирующих регуляторов для децентрализованных систем.

Третья глава посвящена разработке методов и алгоритмов синтеза робастных стабилизирующих регуляторов ССС с ОСВ, где центральную роль играет следующая теорема, которая дает необходимые и достаточные условия робастной стабилизации ССС с ОСВ по отношению к неопределенностям вероятностей смены режимов.

Обозначим конечное множество угловых точек области неопределенностей, как

$$\Delta_0 \triangleq \left\{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_N) \mid \delta_j \in \left\{\underline{\delta}_j, \overline{\delta}_j\right\}, j = 1, \ldots, N\right\}.$$

Теорема 2. *ССС (1) робастно стабилизируема статическим регулятором (2) тогда и только тогда, когда для некоторых симметричных матриц* $M_i(\delta)$, $\delta \in \Delta_0$ *и*

$R_i > 0$ *существует положительно определенное решение* $H_i = H_i^T$ *системы связанных уравнений Риккати*

$$A_i^T H_i + H_i A_i - H_i B_i R_i^{-1} B_i^T H_i + M_i(\delta) + \sum_{j=1}^{\upsilon} \pi_{ij}(\delta) \Phi_{ij}^T H_j \Phi_{ij} = 0 \tag{15}$$

и матрицы L_i *совместимой размерности, удовлетворяющие системе неравенств*

$$(A_i - B_i K_i)^T H_i + H_i (A_i - B_i K_i) + \sum_{j=1}^{\upsilon} \pi_{ij}(\delta) \Phi_{ij}^T H_j \Phi_{ij} - S_i^T K_i - K_i^T S < 0 \tag{16}$$

где $S_i = L_i E_I(i) - B_i^T H_i E_K(i)$, $K_i = R_i^{-1} B_i^T H_i$.

Матрицы усиления робастного стабилизирующего регулятора имеет вид (2), где

$$G_i = R_i^{-1}\left(B_i^T H_i + L_i\right) C_i^{\dagger}. \blacksquare \tag{17}$$

Теорема 2 может быть дополнена рядом условий на структуру управления.

Полагая $H_i = H$, $i \in \mathbb{N}$ (общая функция Ляпунова) получим *необходимые и достаточные условия стабилизации регулятором, зависящим от вероятностей смены режимов*. При выполнении соотношений

$$G_i = R_i^{-1}\left(B_i^T H_i + L_i\right) C_i^{\dagger} = R_j^{-1}\left(B_j^T H_j + L_j\right) C_j^{\dagger} = G_j,\ i, j \in \mathbb{N}$$

получим *необходимые и достаточные условия одновременной стабилизации*, в этом случае матрица усиления стабилизирующего регулятора будет постоянной для всех режимов. Потребовав выполнения обоих указанных ограничений, получим *необходимые и достаточные условия одновременной стабилизации при общей для всех режимов функции Ляпунова*.

Результаты теоремы 2 обобщаются на следующие случаи:

1. Управление, робастное по отношению к неопределенностям отдельных режимов политопного типа. В этом случае неопределенности матриц A_i и B_i, которые для удобства опишем одной блочной матрицей $\Omega_i = [A_i \quad B_i]$, задаются в виде политопа, т.е.

$$\Omega_i = [A_i \quad B_i] \in \mathrm{Co}\left\{[A_{iq} \quad B_{iq}],\ q = 1, \ldots, N\right\}. \tag{18}$$

Иначе говоря, значение Ω_i определяется, как выпуклая комбинация вершин политопа следующим образом: $\Omega_i = \sum_{q=1}^{N} \lambda_{iq} \Omega_{iq}$, $0 \leqslant \lambda_{iq} \leqslant 1$, $\Omega_{iq} = \left\{[A_{iq} \quad B_{iq}],\ q = 1, \ldots, N\right\}$.

Определение 4. *Регулятор с ОСВ (2) называется робастным стабилизирующим для системы* (1) *с неопределенностями политопного типа, если для всех* $\begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix}$, *удовлетворяющих (18), неравенства (3) имеют положительно определенное решение* $H_i = H_i^T$. ■

Для систем с неопределенностями политопного типа в §3.4 получены необходимые и достаточные условия робастной стабилизации управлением с ОСВ.

2. Управление с динамической ОСВ фиксированного порядка. Для таких систем в §3.6 получены необходимые и достаточные условия стабилизации управлением с динамической ОСВ вида

$$u(t) = C_{ci}x_c(t) + D_{ci}y_p(t),\ \dot{x}_c(t) = A_{ci}x_c(t) + B_{ci}y_p(t),\ r(t) = i.$$

3. Управление децентрализованной системой с локальными динамическими ОСВ. Для этих систем в §3.7 получены необходимые и достаточные условия робастной стабилизации управлением с локальными динамическими ОСВ при неопределенностях смены режимов. Локальные управления имеют вид (11).

Идея построения алгоритмов основана на совместном использовании результатов параметризации и полученных в главе 3 теорем. Задача состоит в некотором целенаправленном изменении параметров, от которых зависит регулятор. Эти параметры представляют собой весовые матрицы Q, R и некоторые дополнительные матрицы.

Разработанные алгоритмы можно условно разделить на две группы.

Первую группу образуют алгоритмы, в которых вычисление матриц Ляпунова для системы с ОСС производится через решение связанных уравнений Риккати (очень эффективным является метод Ait-Rami и El Ghaoui на базе LMI). Эти алгоритмы требуют задания весовых матриц состояния Q и управления R исходя из требований к качеству управления и характеристикам регулятора.

Достоинством этой группы алгоритмов является их простота и наглядность, а также возможность использования специальных процедур выбора весовых матриц Q и R, исходя из желаемого расположения полюсов замкнутой системы. Их недостаток проявляется в трудоемкости подбора матриц Ляпунова методом проб и ошибок (в случаях узкой области устойчивости).

Алгоритмы *второй группы* основаны на результатах параметризации, полученных в главе 2. Согласно следствию 1 все матрицы усиления для регуляторов с ОСС задаются формулой (9), где $\Lambda_i = \Lambda_i(\delta)$, $Q_i = Q_i(\delta)$ и произведение $\Lambda_i(\delta)Q_i^{1/2}(\delta) = \Psi_i$ не зависит от $\delta \in \Delta_0$. С другой стороны, в соответствии с теоремой 2 имеем $K_i = R_i^{-1}B_i^T H_i$, где H_i удовлетворяет уравнению (15).

Пусть $H_i > 0$ является решением линейного матричного уравнения

$$R_i^{-1}B_i^T H_i = R_i^{-1}B_i^T P_i + R_i^{-1/2}\Lambda_i(\delta)Q_i^{1/2}(\delta)$$

Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться, что это решение будет удовлетворять (15) для некоторой матрицы $M_i(\delta) = M_i^T(\delta)$.

На основании изложенного можно сформулировать следующий алгоритм вычисления G_i.

Шаг 1. Решить LMI относительно переменных Y_i: $\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} \end{bmatrix} < 0$

где $\Gamma_{11} = B_i^{\perp}\left(A_i Y_i + Y_i A_i^T + \pi_{ii} Y_i\right) B_i^{\perp T}$, $\Gamma_{22} = -\mathrm{diag}[Y_1 \dots Y_{i-1}\ Y_{i+1} \dots Y_v]$,

$$\Gamma_{12}(\delta) = [B_i^{\perp}\pi_{i1}^{1/2}(\delta) Y_i \Phi_{i1}^T \dots B_i^{\perp}\pi_{ii-1}^{1/2}(\delta) Y_i \Phi_{ii-1}^T\ \ B_i^{\perp}\pi_{ii+1}^{1/2}(\delta) Y_i \Phi_{ii+1}^T \dots B_i^{\perp}\pi_{iv}^{1/2}(\delta) Y_i \Phi_{iv}^T].$$

Шаг 2. Найти $P_i = Y_i^{-1}$.

Шаг 3. Найти $Q_i(\delta) > 0$, $R_i(\delta) > 0$ из уравнений (7), в которых вместо $\pi_{ij} = \pi_{ij}(\delta)$.

Шаг 4. Положить $H_i = P_i$, $\rho = -1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 < 1$.

Шаг 5. Найти $K_i = R_i^{-1} B_i^T H_i$.

Шаг 6. Если LMI (16) относительно переменных L_i разрешимы, то вычислить матрицы G_i (17), иначе найти матрицы H_i как решения следующей оптимизационной задачи относительно $H_i > 0$, Ψ_i и $\Lambda_i(\delta)$:

$$\mathrm{tr}\sum_{i=1}^{v} H_i \to \max, \quad R_i^{-1}B_i^T H_i = R_i^{-1}B_i^T P_i + R_i^{-1/2}\Lambda_i(\delta)Q_i^{1/2}(\delta),$$

$$H_i > 0, \ \ \Lambda_i(\delta)Q_i^{1/2}(\delta) = \Psi_i, \ \begin{bmatrix} \varepsilon I & \Lambda_i(\delta) \\ \Lambda_i^T(\delta) & I \end{bmatrix} > 0, \ i \in \mathbb{N}, \ \delta \in \Delta_0.$$

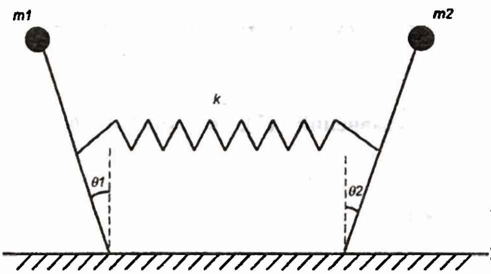
Шаг 7. Положить $\varepsilon = \varepsilon + \Delta\varepsilon$.

Шаг 8. Если $\varepsilon > 1$ – вычисления закончить, иначе идти к шагу 5.

В четвертой главе приведен обзор ПО на основе LMI, выполнен краткий сравнительный анализ используемых в настоящее время программных пакетов выпуклой оптимизации, на конкретных примерах продемонстрирована архитектура и ключевые особенности разработанных программ.

В пятой главе приведены результаты применения разработанного программного обеспечения к конкретным задачам. Рассматриваются два примера: робастная стабилизация продольного движения летательного аппарата и стабилизация децентрализованной системы из двух перевернутых маятников. Для каждого из рассмотренных примеров формулируется математическая модель системы управления, рассматриваются специфические особенности алгоритма синтеза стабилизирующего регулятора, результаты численного моделирования иллюстрируются графиками реакции замкнутой системы на импульсное воздействие, производится анализ поведения системы при изменении ключевых параметров.

Рассмотрим пример синтеза робастного управления для простейшей децентрализованной системы, состоящей из двух локальных замкнутых подсистем, каждая из которых условно моделируется перевернутым маятником единичной длины, на конце которого закреплен груз. Взаимодействие подсистем смоделировано в виде упругой пружины, закрепленной в середине маятников и соединяющей их (см. ниже).



Масса груза может скачкообразно изменяться, принимая одно из 3 возможных значений, что в сумме дает 9 возможных «режимов» работы такой системы. Задача заключается в стабилизации обоих маятников динамическими ОСВ, причем измерению доступны лишь углы отклонения маятников от их вертикалей – θ_1 и θ_2.

Уравнения движения имеют следующий вид

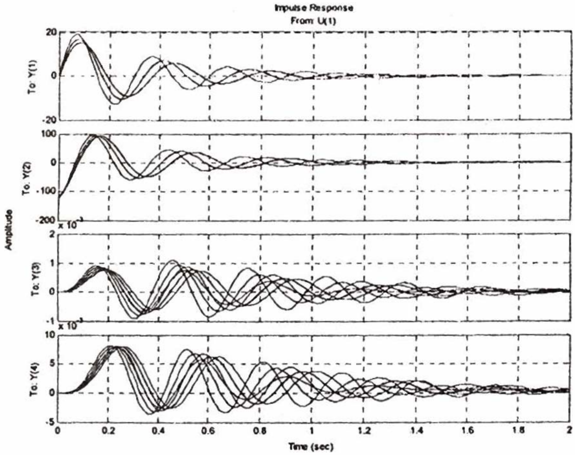
$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 &= m_1 g l \theta_1 - k a^2 (\theta_1 - \theta_2) + u_1, \quad y_1 = \theta_1, \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 &= m_2 g l \theta_2 - k a^2 (\theta_2 - \theta_1) + u_2, \quad y_2 = \theta_2, \end{aligned} \tag{19}$$

Децентрализованную систему двух перевернутых маятников можно привести к совокупности двух взаимосвязанных ЛЗП, описывающих рассоединенные маятники с векторами состояний $x_1 = (\theta_1, \dot{\theta}_1)^T$ и $x_2 = (\theta_2, \dot{\theta}_2)^T$

$$\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} u_1, \; y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_1, \; \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u_2, \; y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 .$$

где $\alpha_i = \frac{g}{l}$, (l – длина маятника), $\beta_i = \frac{1}{m_i l^2}$ (m_i – масса маятника), $\gamma_i = \frac{a^2 k}{m_i l^2}$, a – точка крепления пружины, k – коэффициент Гука.

Локальные динамические регуляторы первого порядка задаются соотношениями (11). Графики импульсных переходных функций системы по первой координате (угол отклонения первого маятника) представлены на графиках.



ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Получено параметрическое описание всех стабилизирующих регуляторов со статической и динамической обратной связью по выходу для следующих типов систем случайной структуры:
   а. системы с полностью определенными параметрами
   б. системы с неопределенностями смены режимов
   в. децентрализованные системы
2. Получены необходимые и достаточные условия робастной стабилизации статической и динамической обратной связью по выходу для следующих типов систем случайной структуры:
   а. системы с неопределенностями смены режимов
   б. системы с политопными неопределенностями отдельных режимов;
   в. децентрализованные системы с неопределенностями смены режимов;
3. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение синтеза робастных регуляторов с обратной связью по выходу для систем случайной структуры.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Митрофанов И.Н., Синтез робастных систем стабилизации на основе линейных матричных неравенств // Будущее технической науки Нижегородского региона. Тезисы докладов регионального молодежного научно-технического форума. – Нижний Новгород, 2002, С.123-124.
2. Пакшин П.В., Митрофанов И.Н., Применение SEDUMI-интерфейса к решению задач робастного управления с обратной связью по выходу // Труды Второй Всероссийской научной конференции «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB». – М.: ИПУ РАН, 2004. С.1074-1089.
3. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N., Parameterization of robust stabilizing controllers with output feedback for jump linear systems // Proceedings of the 6th International Conference "Control of Power Systems". Bratislava: Slovak University of Technology, 2004. P. 1-12 (CD-ROM).
4. Пакшин П.В., Митрофанов И.Н., Параметризация робастных стабилизирующих управлений для систем случайной структуры // VII Международный Семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем" памяти Е.С.Пятницкого. Тезисы докладов. – М.: ИПУ РАН, 2004. С.138-140.
5. Пакшин П.В., Митрофанов И.Н., Параметризация стабилизирующих управлений с динамической обратной связью по выходу для систем случайной структуры // 9-я международная конференция «Системный анализ и управление». Тезисы докладов. – М.: Изд. МАИ, 2004. С.118.
6. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N., Parameterization of stabilizing controllers and robust stabilization via static output feedback for jump linear systems // Proceedings of the 6th IFAC-Symposium on Nonlinear Control Systems. – Stuttgart: Universität Stuttgart, 2004. Vol.3, p.1151-1156.
7. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N., Parameterization of decentralized output feedback controllers and robust stabilization of large scale jump systems // Proceedings of the 16th IFAC world congress. – Prague, 2005. pp. 1-6 (CDROM).
8. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N., Robust stabilization of jump polytopic systems via output feedback // Proceedings of the CDC-ECC conference. – Seville, 2005.
9. Pakshin P.V., Mitrofanov I.N., Output feedback stabilization of linear systems with parametric noise // Abstracts of the papers submitted to the International conference in honor of Professor Boris Polyak. – Moscow, 2005.

Подписано в печать 24.10.2005. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 80 экз. Заказ 672.

Нижегородский государственный технический университет.
Типография НГТУ. 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.