На правах рукописи

Бовырин Александр Владимирович

ДОСТИЖЕНИЕ ЗАДАННЫХ КАЧЕСТВЕННО – ЧИСЛЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КЛАССОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико - математических наук

Нижний Новгород - 2003

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА В НИЖЕГОРОДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ АРХИТЕКТУРНО - СТРОИТЕЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор **Брусин Владимир Александрович**

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор **Пакшин Павел Владимирович**

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник **Баландин Дмитрий Владимирович**

Ведущая организация

Институт Проблем Управления им. В.А.Трапезникова Российской Академии Наук

Защита диссертации состоится "27" февраля 2003 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.165.05 при Нижегородском государственном техническом университете по адресу: 603600, Нижний Новгород, ул. Минина, 24, НГТУ, корпус 1, аудитория 1258.

С диссертацией можно ознакомиться в научно – технической библиотеке Нижегородского государственного технического университета.

Автореферат ра[...] "21" января 2003 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат технических наук, доцент А.П. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена разработке математических методов управления динамическими системами с помощью динамических регуляторов в условиях неполной информации о параметрах объекта и характеристиках действующих возмущений.

Эта задача является одной из самых приоритетных проблем математической теории управления, поскольку главным моментом в постановке задач современной теории управления становится отражение дефицита информации об управляемом объекте. В связи с этим появился и новый раздел - теория "робастного" управления.

Робастным принято называть управление, осуществляемое регуляторами, которые способны обеспечить выполнение цели управления в условиях какой-либо неопределенности в описании объекта.

В исследуемых в данной работе классах систем управления эта неопределенность проявляется, в частности: в виде отсутствия характеристик внешнего возмущения, неполной априорной и апостериорной информации о текущем состоянии объекта, наличия неточностей в математическом описании объекта, помех в системе измерения выходных данных управляемого объекта.

Одной из отличительных особенностей проведенной работы является то, что в замкнутой системе "управляемый объект" - "регулятор" учитываются возможные внутренние и внешние возмущения в динамической обратной связи, что имеет большое значение для осуществления робастного управления объектом.

В большинстве известных работ по созданию систем автоматического регулирования размерность получаемых регуляторов равна размерности вектора состояния управляемого объекта. В диссертационной работе получены регуляторы, имеющие размерность, уменьшенную на размерность выходного вектора объекта, что весьма важно для технической реализации систем автоматического управления.

В последние годы активно рассматриваются задачи управления бесконечномерными объектами. Основным методом исследования бесконечномерных объектов является метод, заключающийся в разложении исходной системы на гармоники и отбрасывании высших гармоник (или немоделируемой части). Однако распространение методов управления конечномерными объектами на бесконечномерные системы порождает ряд трудностей, так как неучитываемые в законе управления высшие гармоники могут внести в совокупности такой вклад в движение замкнутой системой, который сделает ее неустойчивой. В диссертации дается решение задачи H^∞-управления объектами с бесконечным числом степеней свободы, в частности, описывающиеся уравнениями в частных производных, и предложено решение в классе конечномерных динамических регуляторов "по выходу".

Цель работы. При проведении исследований, отраженных в диссертации, были поставлены следующие цели:

1. Получить класс динамических регуляторов уменьшенной (на размерность выхода) размерности, обеспечивающих выполнение H^∞-критерия в условиях действия внешних возмущений и возмущений в обратной связи замкнутой системы.

2. Получить класс робастных регуляторов уменьшенной размерности для управления объектами с нелинейными неопределенными блоками в условиях действия внутреннего возмущения в системе измерения выходных сигналов.

3. Дать метод синтеза конечномерных регуляторов для решения задачи H^∞-управления для класса распределенных объектов, описание которых можно свести к бесконечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением и возмущением в правой части.

4. На основе полученных алгоритмов решить ряд конкретных задач гашения вынужденных колебаний механических систем из упругосвязанных масс в условиях действия помех в объекте и в системе измерения и задачи гашения поперечных колебаний упругой балки на основе H^∞-критерия.

Методы решения. При решении поставленных задач использовались методы теории глобальных функций Ляпунова, элементы теории дифференциальных игр, теории управления многосвязанными объектами, теории дифференциальных уравнений и матричного анализа, метод априорных оценок, теории функционального анализа, теории абсолютной устойчивости, а также методы численного моделирования в пакете MATLAB.

Научная новизна. В диссертационной работе предложены новые алгоритмы управления конечномерными системами в условиях априорной и апостериорной неопределенности о параметрах объекта с возмущениями в обратной связи замкнутой системы "управляемый объект" - "регулятор" и конкретными требованиями к качественно - численным характеристикам замкнутой системы (размерность регулятора, абсолютная стабилизируемость, H^{∞}-критерий с заданными параметрами). Установлены теоремы о решении задач H^{∞}-управления и абсолютной стабилизации. Получена и обоснована процедура понижения размерности полученных регуляторов. Сформулированы и доказаны условия, при которых полученные конечномерные динамические регуляторы по выходу обеспечивают выполнение H^{∞}-критерия для широкого класса бесконечномерных объектов.

Практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы как для управления конечномерными, так и распределенными системами. При этом объекты управления могут подвергаться неизмеряемому внешнему возмущению неизвестной природы, иметь неопределенные нелинейные внутренние блоки и, более того, могут быть подвержены возмущениям, действующим в измерительных устройствах управляющей системы, в частности, - для актуальной в настоящее время задачи создания систем автоматического управления высотными сооружениями в сейсмически опасных зонах.

Немаловажно, что полученные регуляторы используют в качестве текущей информации не полную информацию об объекте, а только некоторый выходной процесс. Это отражает реальные возможности, имеющиеся при управлении многими сложными объектами.

Предлагаемые регуляторы имеют размерность, уменьшенную на размерность выходного вектора объекта, что весьма выгодно с технической точки зрения при проектировании и изготовлении управляющих систем при определенных технических ограничениях на их структуру.

Изложенные здесь регуляторы работают в реальном времени и легко реализуемы компьютерной и аналоговой техникой, что также отвечает современным требованиям к управлению конкретными системами.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод синтеза регуляторов пониженной размерности в условиях действия внешних возмущений в объекте и в системе измерения выходных процессов, решающих задачу управления по H^∞ - критерию;
2. Метод синтеза регуляторов пониженной размерности для решения задачи об абсолютной стабилизируемости систем с неопределенными нелинейными блоками в объекте и в системе измерения выходных переменных;
3. Метод синтеза конечномерных регуляторов для управления распределенными объектами, описание которых сводится к бесконечномерным системам обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением и возмущением в правой части.

Апробация результатов работы. Результаты апробировались на всероссийских и международных конференциях, таких, как "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва), "Нелинейные колебания механических систем" (Н.Новгород), на 5-м международном симпозиуме "Нелинейные системы управления NOLCOS'01" (Санкт-Петербург), на международной конференции "Conference On Decision And Control" (Флорида).

Публикации и вклад автора. Основные результаты диссертации отражены в 10 печатных работах. В совместных публикациях научному руководителю принадлежат базовый метод и общая схема исследования. Получение алгоритмов управления, доказательство теорем, решение конкретных задач управления и численное моделирование были сделаны автором диссертации.

Связь с планом. Данная диссертация выполнялась в рамках ведущих федеральных программ по фундаментальным наукам (тема РФФИ, грант N 02-01-00230, N 99-01-00037; "Университеты России", грант

N 03.01.024).

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из четырех глав, включая введение и заключение. Общий объем работы 80 страниц, включая 12 рисунков и список литературы из 75 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе (Введение) обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткая история проблемы и ее современное состояние, представлен базовый метод, описаны основные достигнутые результаты и структура работы.

Вторая глава посвящена синтезу регуляторов размерности меньшей размерности объекта, решающих задачи робастного управления конечномерными объектами по выходу.

В §2.1 рассматривается класс объектов с постоянно действующим неизмеряемым внешним возмущением и возмущением в динамической обратной связи замкнутой системы "управляемый объект" - "регулятор". Про эти возмущения известно лишь, что они локально интегрируемы с квадратом.

Рассматриваются управляемые системы, описывающиеся уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 f, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор состояния системы в момент времени t, $u(t) \in R^m$ – вектор управляющего воздействия, $f(t) \in R^l$ – вектор внешнего возмущающего воздействия, A, B_1, B_2 – матрицы соответствующих размерностей, матрица A является гурвицевой.

Выходной вектор системы (1) задается соотношением

$$y = Qx + B_3 f, \tag{2}$$

где $y \in R^k$, Q, B_3 – матрицы соответствующих размерностей.

При этом вектор "объединенного" возмущающего воздействия $f(t)$ имеет две компоненты, одна из которых $\xi(t)$ играет роль внешнего аддитивного возмущения и действует на правую часть системы (1), вторая $\eta(t)$ определяет возмущение в выходных переменных (2). То есть

$$f(t) = col(\xi(t), \eta(t)), \tag{3}$$

$\xi(t) \in R^s$, $\eta(t) \in R^p$, $s + p = l$.

На траекториях системы (1) рассматривается интегрально-квадратичный функционал вида

$$J_T(u(t), f(t)) = \left\{ \int_0^T F(x(t), u(t), f(t))dt \quad | \quad (1), \quad x(0) = x_0, \right\}, \tag{4}$$

$$F(x(t), u(t), f(t)) = |z(t)|^2 + \rho^2 |u(t)|^2 - \langle f(t), \Gamma f(t) \rangle, \tag{5}$$

где $z(t) = Cx(t), z \in R^r$, C – некоторая матрица, ρ – заданный числовой коэффициент, матрица $\Gamma > 0$ задается так, что

$$\langle f(t), \Gamma f(t) \rangle = \langle \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \Gamma \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} \rangle = \gamma_1^2 |\xi(t)|^2 + \gamma_2^2 |\eta(t)|^2.$$

То есть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 I_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2^2 I_2 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где γ_1, γ_2 – заданные числовые коэффициенты, I_1, I_2 – единичные матрицы соответствующих размерностей (знак "|" в (4) буквально означает: "для любых процессов x, u, f, удовлетворяющих (1) при условии $x(0) = x_0$").

Задача управления заключается в следующем: требуется найти регуляторы из класса линейных регуляторов, описываемых динамической системой вида

$$\begin{cases} \dot{\omega} = a\omega + by, & \omega(0) = \omega_0, \\ u = c\omega + dy, \end{cases} \tag{7}$$

$\omega \in R^q$ $(q \leq n)$ – вектор состояния регулятора, a, b, c, d – матрицы соответствующих размерностей, y – выходной вектор (2), которые гарантируют выполнение следующего H^∞-критерия

$$\sup_{T>0} J_T \leq const(h), \quad \forall h = col(x_0, w_0), \quad const(0) = 0 \tag{8}$$

для всех $f(t) \in L_2^{loc}$, где L_2^{loc} – пространство локально интегрируемых с квадратом функций

$$L_2^{loc} : \{f(t), \quad \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \forall T > 0\}.$$

В соотвествии с подходом, предложенным В.А. Брусиным, решение поставленной задачи H^∞-управления предлагается искать в классе динамических регуляторов, описывающихся следующей системой уравенений:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 u + B_2 f + T[Q\hat{x} + B_3\hat{f} - y], \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \\ u = l_1\hat{x}, \\ \hat{f} = l_2\hat{x}, \end{cases} \tag{9}$$

где $\hat{x}$ – вектор состояния регулятора, T – матричный параметр данного класса регуляторов, l_1, l_2 – линейные ограниченные операторы

$$l_1 = -\frac{1}{\rho^2}B_1^T P, \qquad l_2 = \Gamma^{-1}B_2^T P, \tag{10}$$

$P = P^T > 0$ - положительно-определенное решение матричного уравнения Риккати

$$A^T P + PA + C^T C - P(\frac{B_1 B_1^T}{\rho^2} - B_2\Gamma^{-1}B_2^T)P = 0. \tag{11}$$

Вводится в рассмотрение вспомогательная система "в отклонениях" с вектором состояния $\tilde{x} = x - \hat{x}$, входом $\tilde{u} = u - u^*$ и выходом $\tilde{f} = f - f^*$, где $u^* = l_1 x$, $f^* = l_2 x$. Система "в отклонениях" имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A + B_2 l_2 + TQ + TB_3 l_2)\tilde{x} + (B_2 + TB_3)\tilde{f}, \quad \tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0, \\ \tilde{u} = -l_1\tilde{x}. \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 2.1. Пусть выполняются следующие условия: 1)Существует положительно определенное решение уравнения Риккати (11); 2)Матрица $\tilde{A} = A + B_2 l_2 + TQ + TB_3 l_2$ устойчива; 3)Для передаточной функции $\Psi(p)$ системы "в отклонениях" (12)

$$\Psi(p) = -l_1(pI - A - TQ - (B_2 + TB_3)l_2)^{-1}(B_2 + TB_3) \tag{13}$$

выполняется частотное условие

$$\rho^2\Psi^T(j\omega)\Psi(-j\omega) < \Gamma, \qquad \forall\omega > 0. \tag{14}$$

Тогда регуляторы из класса (9) будут решать поставленную задачу H^∞-управления.

В §2.2 решается задача абсолютной стабилизации управляемых систем по выходу. Отличительной особенностью здесь является то, что, рассматриваются объекты, в которых нелинейная неопределенность присутствует как в объекте, так и в системе измерения выходного вектора объекта. Задача абсолютной стабилизации решена для довольно широкого класса нелинейностей. Причем получаемые регуляторы имеют такую же структуру, что и в случае задачи H^∞-управления.

Рассматриваются управляемые по выходу системы вида (1) - (3). Причем компоненты вектора $f(t) = col(\xi(t), \eta(t)) \in R^l$ играют роль внутренних возмущений в объекте (1) и в системе измерения выходных переменных (2). $\xi \in R^l$ - вектор значений некоторого нелинейного оператора $\phi_1 : R^n \times R^1 \to R^s$; $\eta \in R^p$ - вектор значений нелинейного оператора $\phi_2 : R^n \times R^1 \to R^p$. При этом нелинейные операторы ϕ_1 и ϕ_2 принадлежат некоторому классу K, причем для любого $\phi_1 \in K$ система (1) имеет при любых начальных условиях x_0 решение, определенное при всех $t > 0$.

Определение 1. Управляемую динамическую систему (1) будем называть абсолютно стабилизируемой по выходу (2) в классе нелинейных операторов K, если существует регулятор вида (7), правые части которого не зависят от конкретных нелинейностей $\phi_i \in K$, $(i = 1, 2)$, такой, что для замкнутой системы (1), (2), (7) при любых начальных условиях (x_0, ω_0) будут справедливы следующие соотношения:

$$\begin{array}{l} \sup_{t\in[0,\infty)}(|x(t)|^2 + |\omega(t)|^2 + |\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2) + \\ \quad + \int_0^\infty (|x(t)|^2 + |\omega(t)|^2)dt \le C(h), \\ \lim_{t\to\infty}(|x(t)| + |\omega(t)|) = 0, \end{array} \tag{15}$$

где ω - вектор состояния регулятора (7), $C(h)$ - некоторая константа, зависящая от $h = col(x_0, \omega_0)$, $C(0) = 0$.

Определение 2. Будем говорить, что операторы ϕ_1, ϕ_2 принадлежат классу $K(F)$ в системе (1), (2), (7), где F - квадратичная форма от переменных (x, u, f), если для произвольных функций $x(t), u(t), f(t)$, удовлетворяющих при всех $t > 0$ соотношениям (1), (2), (7), справедливо неравенство

$$\int_0^T F(x(t), u(t), f(t))dt \ge 0, \quad \forall T > 0, \tag{16}$$

квадратичная форма F имеет вид

$$F(x(t),u(t),f(t)) = \langle x(t),Hx(t)\rangle + \rho^2 u(t) - \langle f(t),\Gamma f(t)\rangle = \\ = \langle x(t),Hx(t)\rangle + \rho^2 u(t) - \gamma_1^2\langle \xi(t),\xi(t)\rangle - \gamma_2^2\langle \eta(t),\eta(t)\rangle, \tag{17}$$

H - некоторая заданная матрица, ρ^2, γ_i^2, $(i=1,2)$ - заданные числовые коэффициенты, а матрица Γ имеет вид (6).

Задача состоит в построении регуляторов вида (7), таких, что замкнутая система (1), (2), (7) является абсолютно стабилизируемой по выходу (в смысле определения 1).

Для решения поставленной задачи получен следующий результат.

Теорема 2.2. Пусть выполняются следующие условия: 1)Существует положительно определенное решение $P = P^T > 0$ уравнения Риккати вида

$$A^T P + PA + H - P(\frac{B_1 B_1^T}{\rho^2} - B_2\Gamma^{-1}B_2^T)P = 0, \tag{18}$$

где ρ, Γ, H - параметры класса нелинейностей (16),(17); 2)Матрица $\tilde{A} = A + B_2 l_2 + TQ + TB_3 l_2$ устойчива; 3) Для передаточной функции (13) выполняется частотное (14); 3)Матрица $\bar{A} = A + B_1 l_1 + B_2 l_2$ устойчива; 4)Для нелинейностей ϕ_i справедливы оценки

$$|\phi_i(x,t)| \le c_i |x|^{p_i}, \qquad (i=1,2), \tag{19}$$

где c_i, p_i – некоторые положительные константы.

Тогда регуляторы из класса (9) будут решать поставленную задачу абсолютной стабилизации "по выходу" (в смысле определения 1) замкнутой системы (1), (2), (9) в классе нелинейностей (16),(17).

В §2.3 представлен основной результат второй главы: синтез регуляторов пониженной размерности для решения задачи H^∞-управления и абсолютной стабилизации. Дана процедура понижения размерности регуляторов, полученных в §2.1, §2.2. Размерность регуляторов после применения этой процедуры уменьшается на размерность выходного вектора.

За основу процедуры расщепления берется процедура для случая отсутствия возмущения ($\eta \equiv 0$) в обратной связи, предложенная В.А. Брусиным. В случае $\eta \neq 0$ эта процедура имеет ряд существенных особенностей. Обозначим "невозмущенный" выход (2) системы (1) через

$y_1 = Qx$. Расщепление пространства состояний R^n системы (1) в этом случае будет иметь вид $R^n \ni x \leftrightarrow (v, y_1)$, $y_1 \in R^k$, $v \in R^{n-k}$,

$$x = \Gamma_1 v + \Gamma_2 y_1, \tag{20}$$

где Γ_1,Γ_2 - матрицы размера $n \times n - k$ и $n \times k$ соответственно, удовлетворяющие следующему условию $det(\Gamma_1, \Gamma_2) \neq 0$.

При этом справедливы соотношения $Q\Gamma_1 = O_{k\times n-k}, Q\Gamma_2 = I_k$, где ($I_k$ - единичная $k \times k$ - матрица, O - нулевая $k \times (n-k)$ - матрица) и будет существовать $(n-k) \times n$ - матрица L, однозначно определяемая из соотношения $I_n = \Gamma_1 L + \Gamma_2 Q$ и удовлетворяющая равенствам $L\Gamma_1 = I_{n-k}, \quad L\Gamma_2 = O_{(n-k)\times k}$.

Тем самым пространство состояний R^k разбивается на прямую сумму линейных подпространств

$$x = x_1 \oplus x_2, \quad x_1 = \Gamma_1 L x = \Gamma_1 v, \quad x_2 = \Gamma_2 Q x = \Gamma_2 y_1. \tag{21}$$

После расщепления (20), (21), в соответствии с (9), уравнения регулятора пониженной размерности примут вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{v}} = a_1\hat{v} + a_2\hat{y}_1 + b_1 u + b_2\hat{f}, \quad \hat{v}(0) = \hat{v}_0 \\ \hat{f} = K_1^{-1} l_2(\Gamma_1\hat{v} + \Gamma_2 y) \\ \hat{y}_1 = K_2^{-1}(y - B_3 l_2 \Gamma_1 \hat{v}) \\ u = l_1(\Gamma_1\hat{v} + \Gamma_2\hat{y}_1), \end{cases} \tag{22}$$

где операторы

$$K_1 = (I + l_2\Gamma_2 B_3), \quad K_2 = (I + B_3 l_2 \Gamma_2) \tag{23}$$

обратимы.

Система "в отклонениях" (12) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = (a_1 + VK_1^{-1}l_2\Gamma_1)\tilde{v} + VK_1^{-1}\tilde{f}, \\ \tilde{u} = (-l_1\Gamma_1 + l_1\Gamma_2 B_3 K_1^{-1} l_2 \Gamma_1)\tilde{v} + l_1\Gamma_2 B_3 K_1^{-1}\tilde{f}, \end{cases} \tag{24}$$

где $V = -a_2 B_3 + b_2$.

Для регуляторов из класса (22) доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.3. Пусть выполнены следующие условия: 1)Существует положительно определенное решение уравнения Риккати (11); 2)Операторы K_1 и K_2 (23) обратимы; 3)Матрица $\tilde{a} = a_1 + VK_1^{-1}l_2\Gamma_1$ устойчива; 4)Для передаточной функции $\bar{\Phi}(p)$ системы "в отклонениях" (24) вида

$$\bar{\Phi}(p) = -l_1(\Gamma_1 + \Gamma_2 B_3 K_1^{-1} l_2 \Gamma_1)(Ip - W)^{-1} V K_1^{-1} + l_1 \Gamma_2 B_3 K_1^{-1}, \tag{25}$$

где $W = a_1 + VK_1^{-1}l_2\Gamma_1$, $V = -a_2B_3 + b_2$, выполняется частотное условие (14).

Тогда регуляторы из класса (22) будут решать поставленную в §2.1 задачу H^∞-управления, то есть критерий (8) будет выполняться для замкнутой системы (1), (2), (22).

Теорема 2.4. При выполнении условий *теоремы 2.3* (с заменой матричного уравнения (11) на (18)) и добавления условий 4 и 5 *теоремы 2.2* регуляторы из класса (22) будут решать поставленную в §2.2 задачу абсолютной стабилизации (в смысле определения 1).

В §2.4 представлены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных алгоритмов синтеза регуляторов пониженной размерности в применении к задачам робастного управления механическими системами. В частности, рассматривается задача управления колебаниями двух упругосвязанных масс. Рассмотренные в §2.4 примеры иллюстрируют, что во многих случаях можно аналитически решить вопрос об удовлетворении частотных условий *теоремы 2.1* и *теоремы 2.2*.

В §2.5 приводятся доказательства теорем из второй главы.

В **третьей главе** настоящей диссертации рассматривается задача управления классом бесконечномерных объектов с помощью конечномерных регуляторов. Рассматривается задача управления механическими и физическими системами, распределенными в некоторой ограниченной области и описывающихся дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа с заданными краевыми условиями.

В §3.1 представлено обобщение результатов, полученных в §2.1 для решения задачи управления бесконечномерными объектами по H^∞-критерию. Общая схема исследования заключается в следующем. С помощью операции разложения системы по собственным функциям соответствующей краевой задачи бесконечномерная система декомпозируется на две подсистемы: конечномерную и бесконечномерную. При этом в уравнении конечномерной модели вклад немоделируемой устойчивой бесконечномерной части присутствует как немоделируемая динамика. Для конечномерной подсистемы ставится вспомогательный H^∞-критерий управления таким образом, чтобы его выполнение автоматически влекло за собой и выполнение H^∞ - критерия для исходной бесконечномерной системы. Для решения конечномерной задачи используется метод синтеза регуляторов, решающих задачу H^∞-управления, представленный в §2.1 второй главы данной диссертации.

Таким образом, рассматриваются бесконечномерные управляемые системы, описывающиеся уравнениями вида

$$\ddot{x}_i + \alpha_i\omega_i\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = b_{i1}u(t) + b_{i2}\xi(t), \quad i = 1..\infty, \quad \alpha_i \geq \alpha > 0, \qquad (26)$$

где $u(t) \in R^m$ - управляющий процесс, $\xi(t) \in R^l$ - внешнее возмущение, ω_i - числовые коэффициенты.

Система вида (26), в частности, получается как одно из описаний класса механических и физических систем, распределенных в ограниченной области $D \subset R^n$ и описывающихся дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа с краевыми условиями. В частности, большой класс такого рода систем описывается уравнениями вида

$$W''_{tt}(s,t) + AW(s,t) + \alpha\sqrt{A}W'_t(s,t) = B_1(s)u(t) + B_2(s)\xi(t), \qquad (27)$$

где $W(s,t)\ :\ D \times R^1 \to R^p$ - есть обобщенное решение, в смысле Соболева, данной краевой задачи и как функция переменной s является элементом гильбертова пространства $L_p^2(D)$. A - самосопряженный положительный неограниченный линейный оператор с областью определения $D(A)$ плотной в $L_p^2(D)$, $B_1 : R^m \to L_p^2(D)$ - линейный ограниченный оператор, $B_2 : R^l \to L_p^2(D)$ - линейный ограниченный оператор.

Для уравнений поперечных колебаний балки с одним закрепленным концом оператор A определяется соотношениями:

$$\begin{array}{l} D(A) = \{w(s), s \in [0,l], w(0) = w'(0) = 0, w''(l) = w'''(l) = 0\}, \\ Aw(s) = w^{(IV)}(s). \end{array} \qquad (28)$$

Пусть $\{\Phi_n(s)\}$, $(n = 1..\infty)$ - последовательность ортонормированных собственных функций оператора A. В этом случае уравнение (27) (будем полагать $\alpha_i = \alpha$) с помощью разложения Фурье может быть приведено к системе (26).

При этом $x_n(t) = \ll W(s,t), \Phi_n(s) \gg$, $b_{1n}u(t) = \ll B_1(s)u(t), \Phi_n(s) \gg$, $b_{2n}\xi(t) = \ll B_2(s)\xi(t), \Phi_n(s) \gg$, $(n = 1..\infty)$ - коэффициенты Фурье разложения решений распределенной системы, управления и возмущения по собственным функциям.

Бесконечномерную систему (26) можно записать в виде абстрактного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве бесконечных последовательностей типа l^2.

Определим $\vec{x} = col(x_1, x_2, ...) \in l^2$, $\vec{b_i} = col(b_{i_1}, b_{i_2}, ...) \in l^2$, $\quad i = 1, 2.$ Тогда систему (26) можно записать в виде

$$\ddot{\vec{x}} + \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\dot{\vec{x}} = \vec{b_1}u(t) + \vec{b_2}\xi(t), \tag{29}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – неограниченные операторы $l^2 \to l^2$.

Обозначая $z = col(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$, $z \in l^2$ систему (29) можно записать в форме

$$\dot{z} = \Gamma z + B_1 u + B_2 \xi. \tag{30}$$

Полагается, что для линейного оператора Γ существует экспоненциально устойчивая на l^2 полугруппа $\mathcal{U}_\Gamma(t) : l^2 \to l^2$ инфинитезимальных производящих операторов сдвига по траекториям, удовлетворяющих условию

$$\|\mathcal{U}_\Gamma(t)\|_{l^2 \to l^2} \le c \cdot e^{-\varepsilon t}, \quad \exists \varepsilon > 0, c > 0. \tag{31}$$

Выходной вектор $y \in R^k$ системы (30) определяется соотношением

$$y = Qz, \quad y \in R^k, \tag{32}$$

где $Q = col(q_1, q_2, ..., q_n, ...)$ – линейный ограниченный оператор $l^2 \to R^k$, q_n – $(k \times 2)$ матрицы, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|q_n\|^2_{k \times 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{2} |q_n^{ij}|^2 < \infty.$$

Вводится векторный процесс $g(t) = Cz(t) = col(C_1\vec{x}(t), C_2\dot{\vec{x}}(t))$, вынужденные колебания которого требуется погасить с помощью регулятора вида (3). С этой целью определяется критерий "степени демпфирования" вынужденных колебаний в форме H^∞-критерия:

$$\int_0^T (\|g(t))\|^2 + \rho^2 |u(t)|^2_m - \gamma^2 |\xi|^2_l)\, \mathrm{d}t \le const(z(0), w(0)), \forall T > 0, \tag{33}$$

где ρ - регуляризационный параметр, γ - характеризует "степень демпфирования" вынужденных колебаний, $w(0)$ - начальное условие регулятора (3), $const(z(0), w(0)) = 0$.

Через l^2_N обозначается N мерное подпространство l^2 последовательностей $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, для которых $a_n = 0$ при $n > N$, а через P_N :

$l^2 \to l^2$ оператор ортогонального проектирования на это подпространство. С помощью оператора P_N осуществляется декомпозиция системы (30) на две подсистемы: конечномерную и бесконечномерную

$$\dot z_N = \Gamma_N z_N + B_{1N}u(t) + B_{2N}\xi(t), \dot z_N^{\perp} = \Gamma_N^{\perp} z_N^{\perp} + B_{1N}^{\perp}u(t) + B_{2N}^{\perp}\xi(t) \quad (34)$$

Первое уравнение (34) соответствует первым N уравнениям системы (30). Вектор наблюдения y (32) разлагается в сумму векторов y_N и $y_N^{\perp}$:

$$y = y_N + y_N^{\perp}, y_N = Q_N z_N, y_N^{\perp} = Q_N^{\perp} z_N \quad (35)$$

или

$$y = Q_N z_N + D_N\eta, \eta(t) = D_N^{-1}\sum_{n=N+1}^{\infty} Q_n z_n = D_N^{-1}Q_N^{\perp}z_N^{\perp}, \quad (36)$$

где $\eta \in R^p$ - вспомогательный возмущающий процесс (вклад немоделируемой устойчивой бесконечномерной части исходной системы после декомпозиции), D_N - произвольная обратимая матрица соответствующей размерности.

Для конечномерной системы ставится вспомогательная задача управления, которая заключается в построении регуляторов вида (7), которые гарантировали бы выполнение следующего H^{∞}-критерия $\forall T > 0$

$$\int_0^T (\|g_N\|^2 + (\rho^2 + K_N^0)\|u(t)\|^2 - (\gamma^2 - L_N^0)\|\xi(t)\|^2 - \bar\gamma^2\|\eta(t)\|^2)dt \le const(z(0)), \quad (37)$$

где $\bar\gamma$ - некоторая произвольная константа,

$$\begin{aligned} &K_N = \tfrac{2c_N^2\|B_{1N}^{\perp}\|^2}{\varepsilon_N^2}, L_N = \tfrac{2c_N^2\|B_{2N}^{\perp}\|^2}{\varepsilon_N^2}, \exists c_N, \varepsilon_N > 0 \\ &K_N^0 = K_0K_N, L_N^0 = K_0L_N, K_0 = (\|C_N^{\perp}\|^2 + \bar\gamma^2\|D_N^{-1}\|^2\|Q_N^{\perp}\|^2). \end{aligned} \quad (38)$$

Заметим, что $K_N \to 0$, $L_N \to 0$, $K_N^0 \to 0$ и $L_N^0 \to 0$ при $N \to \infty$.

Доказывается, что из выполнения критерия (38) следует выполнение критерия (33) для бесконечномерной системы.

Обозначим $f(t) = col(\xi(t), \eta(t))$. Матрицы $\bar B_{2N}$, $\bar D_N$ такие, что $\bar B_{2N}f = B_{2N}\xi$, $\bar D_N f = D_N\eta$.

Тогда система первое уравнение (34) и выход (36) запишутся в виде

$$z_N = \Gamma_N z_N + B_{1N}u(t) + \bar B_{2N}f(t), y = Q_N z_N + \bar D_N f(t). \quad (39)$$

Для синтеза регуляторов, решающих задачу H^{∞}-управления для системы (39) с критерием (37), используется результат, полученный в §2.1 второй главы данной диссертации.

В соответствии с этим результатом искомый класс динамических регуляторов описывается следующей системой

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_N = \Gamma_N \hat{z}_N + B_{1N} u + \bar{B}_{2N} \hat{f} + T[Q_N \hat{z}_N + \bar{D}_N \hat{f} - y] \\ u = l_1 \hat{z}_N, \hat{f} = l_2 \hat{z}_N, \end{cases} \tag{40}$$

где $l_1 = -\bar{\rho} B_{1N}^T P$, $l_2 = R^{-1} \bar{B}_{2N}^T P$, $R = \begin{pmatrix} (\gamma^2 - L_N^0) I_1 & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}^2 I_2 \end{pmatrix}$, $\bar{\rho} = (\rho^2 + K_N^0)^{-1}$, I_1, I_2 - единичные матрицы соответствующей размерности, P - положительно определенное решение уравнения Риккати

$$\Gamma_N^T P + P \Gamma_N + C_N^T C_N - P(\bar{\rho} B_{1N} B_{1N}^T - \bar{B}_{2N} R \bar{B}_{2N}^T) P = 0. \tag{41}$$

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

Теорема 3.1. Пусть для оператора Г справедливо условие (31) и выполняются следующие условия: 1)Существует положительно-определенное решение уравнения Риккати (41);2)Передаточная функция $\Psi(p)$ от "вспомогательного" входа $\tilde{f} = f - l_2 z_N$ к "вспомогательному" выходу $\tilde{u} = u - l_1 z_N$ вида

$$\Psi(p) = -l_1(pI - \Gamma_N - TQ_N - (B_{2N} + T\bar{D}_N) l_2)^{-1} (B_{2N} + T\bar{D}_N) \tag{42}$$

устойчива, и выполняется частотное неравенство

$$\Psi^T(j\omega)\Psi(-j\omega) < \bar{\rho} R, \quad \forall \omega > 0. \tag{43}$$

Тогда регуляторы из класса (40) будут решать поставленную задачу H^∞-управления исходной бесконечномерной системой.

В §3.2 даны результаты численного моделирования задачи гашения поперечных колебаний упругой балки (27), (28) по заданному H^∞-критерию (37). Представлены графики, которые подтверждают полученные теоретические результаты.

В заключении перечисляются основные результаты работы и следующие из них выводы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. Бовырин А.В. Синтез регуляторов пониженной размерности для задачи H^∞-управления /Брусин В.А., Бовырин А.В. //Вестник Нижегородского Университета им. Н.И. Лобачевского /Матем. моделирование и оптимальное управление N 2(24).-Н.Новгород: ННГУ, 2001.-С.249-254.

2. Бовырин А.В. Решение некоторого класса задач управления с возмущениями в выходных переменных /Брусин В.А., Бовырин А.В. //Дифференциальные уравнения, т.37, N 11, 2001.-С.1462-1467.

3. Бовырин А.В. Синтез класса регуляторов пониженной размерности для систем с возмущением в наблюдении /Бовырин А.В. // 6-я Нижегородская сессия молодых ученых: Тез.докл./г. Саров, 2001.-С.15-16.

4. Бовырин А.В. Синтез конечномерных регуляторов для некоторого класса бесконечномерных систем /Брусин В.А., Бовырин А.В. // VII международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления": Тез.докл. /Москва, 2002.

5. Бовырин А.В. Синтез регуляторов для решения задач с H^∞-критерием /Брусин В.А., Бовырин А.В. // Архитектура и строительство - 2000: Тез.докл. /Нижегород.арх.-строит.акад.-Н.Новгород: НГАСА, 2000.-С.81-82.

6. Бовырин А.В. Синтез конечных регуляторов для некоторого класса бесконечномерных систем /Брусин В.А., Бовырин А.В. // XI польско-российский семинар "Теоретические основы строительства": сб.тр./ Варшава, 2002.-С.257-262.

7. Бовырин А.В. Управление бесконечномерными колебательными системами по H^∞-критерию с помощью конечномерных регуляторов /Брусин В.А., Бовырин А.В. // VI научная конференция "Нелинейные колебания механических систем": Тез.докл./ Н.Новгород, 2002. -С.30.

8. Bovyrin A.V. On controller design in output H^∞-problems /Brusin V.A., Bovyrin A.V. // VI международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления": сб.тр./Москва, 2000. -С.13.

9. Bovyrin A.V. The absolute stabilization problem as continuation of the Lur'e problem /Brusin V.A., Bovyrin A.V. // 5th IFAC Symp. NOLCOS-01: сб.тр./Санкт-Петербург, 2001.-С.726-731.

10. Bovyrin A.V. Design of reduced order robust controller class for the systems with observation disturbances based on frequency conditions /Brusin V.A., Bovyrin A.V. // Procedings of IEEE Conference on decision and control: сб.тр. /Florida, Orlando, 2001. -P.684-685.